Exercices en Analyse Complexe

September 9, 2022

Une liste d'exercices en analyse complexe,
rassemblée à partir de sources diverses

Olivier de Gaay Fortman

TD1 : Rappel sur les séries entières

Olivier de Gaay Fortman

31 janvier - 4 février 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente. Soit $\sigma\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ une bijection et $b_n = a_{\sigma(n)}$ pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Montrer que $\sum_n b_n$ est encore absolument convergente, et que $\sum_n a_n = \sum_n b_n \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que la conclusion de 1 n'est plus vraie sans l'hypothèse de convergence absolue :
   (a) Donner un exemple d'une série complexe alternée $\sum_n a_n$ telle que $\sum_n a_n$ soit convergente mais $\sum_n a_n$ ne soit pas absolument convergente.
   (b) Donner un exemple d'une série $\sum_n a_n$ comme en 2a avec une bijection $\sigma\colon \mathbb{Z}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}_{\geq 1}$ telle que la série $\sum_n a_{\sigma(n)}$ soit divergente.

Exercice 2

1. Soit f une fonction complexe définie dans un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, primitive d'une fonction continue par morceaux f'. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $|f'(x)| \leq M$ dans $[a,b]$ pour un $M \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrer que l'on a $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.
2. Pour quelles fonctions f comme ci-dessus a-t-on l'égalité $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = M\frac{(b-a)^2}{4}$?

Exercice 3

Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble et soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions complexes définies dans E.

1. Supposons que (g_n) converge uniformément dans E vers une fonction complexe $f\colon E \to \mathbb{C}$. Montrer que (g_n) converge simplement vers f dans E.
2. Donner un exemple d'un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ et d'une suite de fonctions complexes $(g_n)_{n\geq 1}$ tels que les g_n convergent simplement vers 0 dans E mais ne convergent pas uniformément vers 0 dans E.
3. Si la série de terme générale $\sum_n g_n$ est normalement convergente dans E, est-elle aussi uniformément convergente dans E ?
4. Supposons maintenant que $E = \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, soit $I_n = [n^2, (n+1)^2] \subset E$ et $f\colon E \to \mathbb{C}$ définie par $f_n(x) = 0$ si $x \notin I_n$ et $f_n(x) = 1/n$ si $x \in I_n$. Montrer que la série de fonctions de terme générale f_n est uniformément convergente dans E, mais pas normalement convergente dans E.

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n\ \geq 0}$ une suite de nombres complexes tels que $\Re(a_n) \geq 0$ pour tout n.

1. Montrer que si les deux séries $\sum_n a_n$ et $\sum a_n^2$ sont convergentes, il en est de même de $\sum |a_n|^2$.
2. La série de terme général $|a_n|$ est-elle alors convergente ?

Exercice 5

Soient (a_n), (b_n) deux suites de nombres complexes.

1. On pose $\sigma_n = \sum_{i=1}^n a_i$ et $\sigma_0 = 0$, de sorte que $a_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Déduire la *sommation partielle d'Abel* : $\sum_{i=m}^n a_i b_i = a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=m}^{n-1} \sigma_i (b_i - b_{i+1}) - \sigma_{m-1} b_m + \sigma_n b_n$.
2. Supposons que la suite (a_n) est telle que la suite (σ_n) soit bornée, et que la suite (b_n) soit formée de nombres réels > 0, est décroissante et tend vers 0. Montrer que la série $\sum_n a_n b_n$ est convergente.
3. Soit (a_n) une suite décroissante de nombre réels tendant vers 0 telle que la série de terme général a_n soit divergente. Montrer que la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et est convergente en tout point du cercle $\partial D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ sauf au point $z = 1$.

Exercice 6

1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Notons $E(f)$ l'ensemble des points du cercle unité $\partial D(0, 1) \subset \mathbb{C}$ où la série converge. Montrer que les cas suivants peuvent se produire :

$$(1).\ E(f) = \partial D(0, 1), \quad (2).\ E(f) = \emptyset, \quad (3).\ E(f) = \partial D(0, 1) \setminus \{z_0\} \text{ avec } z_0 \in \partial D(0, 1).$$

2. Définir trois ensembles non-dénombrables S_1, S_2, S_3 de séries entières $f(z) = \sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R = 1$ tels que chaque $f(z) \in S_i$ satisfasse la condition (i) ci-dessus, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, et tels que deux $f(z), g(z) \in S_i$ avec $f(z) \neq g(z)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ et $-\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série hypergéométrique :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n.$$

†Exercice 8

Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions sommes de séries entières sur le disque unité ouvert $D(0, 1)$. On suppose que $|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2$ est constante $D(0, 1)$. Que peut-on dire de $f_1, \ldots, f_m$?

†Exercice 9

Soit $f(z)$ une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$. Pour tout $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on note $M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$, et $A(r) = \sup_{|z| \leq r} \Re(f(z))$. On va montrer le *Lemme de la Partie Réelle :* pour tous $r, R \in \mathbb{R}$ avec $R > r > 0$, on a l'inégalité $M(r) \leq \frac{R+r}{R-r} |f(0)| + \frac{2r}{R-r} A(R)$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \Re\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$.
2. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $r > 0$ on a $|a_n| \leq \frac{2A(r)}{r^n}$. En déduire que pour tous $R > r > 0$ on a $M(r) \leq ((2r)/(R-r)) \cdot A(R)$.
3. Prouver le Lemme de la Partie Réelle.

†Exercice 10

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On considère une série entière $F(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Montrer que si λ n'est pas une racine de l'unité alors il existe une série entière $\psi(z) = \sum_{n \geq 1} b_n z^n$ telle que $b_1 \neq 0$ et $F(\psi(z)) = \psi(\lambda z)$. On dit que F est *formellement conjuguée à son modèle linéaire* $z \mapsto \lambda z$.
2. Montrer que si le rayon de convergence de F est strictement positif et $|\lambda| < 1$ alors on peut choisir ψ avec un rayon de convergence strictement positif.

TD2 : Fonctions analytiques

Olivier de Gaay Fortman

7 - 11 février 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Donner un exemple d'une fonction $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
   (a) ρ est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$,
   (b) $\rho(x) \geq 0$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$,
   (c) $\rho(x) = 0$ pour $x < -\alpha$ et $x > \alpha$, et $\rho(x) > 0$ pour $x \in]-a, a[$,
   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et une fonction ρ comme dans 1, définissons le polynôme
$$P_n(x) = \rho(0) + \frac{\rho'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{\rho^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$
   Choisir ρ telle que la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément vers ρ dans $[-\alpha, \alpha]$.
3. Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non-constante et $\mathcal{C}^\infty$ et d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ tels que $f|_U = 0$ pour la restriction $f|_U$ de f à U. Existe-t-il une telle fonction f qui soit analytique ?

Exercice 2

On va utiliser le théorème suivant :

Théorème. *Soient $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $h(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ des séries entières convergentes autour de $z = 0$ avec $h(0) = b_0 = 0$. Soient $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$. Supposons que $f(z)$ soit absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq r$. Supposons aussi que $\sum_n |b_n| s^n \leq r$. Définissons $g = f(h)$ comme la série entière*
$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)^n.$$
Alors g converge absolument dans $\overline{D}(0, s)$, et pour tout $z \in \overline{D}(0, s)$, on a $g(z) = f(h(z))$.

1. Soient $U \subset \mathbb{C}$ et $V \subset \mathbb{C}$ ouverts et soient $g\colon U \to V$ et $f\colon V \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Montrer que la fonction $f \circ g\colon U \to \mathbb{C}$ est analytique.
2. Soient $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ des fonctions analytiques. Montrer que toute puissance f^n ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) est analytique dans U. Déduire que la fonction produit $f \cdot g\colon U \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z) \cdot g(z)$ est analytique.
3. Soient $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques telles que $g(z) \neq 0$ pour chaque $z \in U$. Montrer que la fonction $f/g\colon U \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)/g(z)$ est analytique.
4. Notons $\exp(z)$ la fonction analytique $\sum_{n\geq 0} z^n/n!$ de rayon de convergence $R = +\infty$. Montrer que les fonctions
$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right), \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)$$
   sont analytiques dans $\mathbb{C}$ et donner leur termes généraux.
5. Montrer que la fonction analytique $f(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z)$ est constante et donner $f(z) \in \mathbb{C}$.

Exercice 3

Montrer qu'une série entière $\sum_n a_n z^n$ est une fonction analytique dans son disque ouvert de convergence.

Exercice 4

Soit f une fonction analytique dans un voisinage de $z = 0$ dans $\mathbb{C}$, et soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ qui tend vers 0.

1. Supposons que f prenne des valeurs réelles aux a_n. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ au voisinage de 0.
2. Supposons que f prenne des valeurs réelles aux points a_n, et de plus que $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Montrer que f est constante dans un voisinage de 0.

Exercice 5

Supposons qu'une fonction f soit analytique dans un ensemble ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$ et ne soit pas identiquement nulle dans U. Soit $K \subset \mathbb{C}$ une partie non-vide, fermée et bornée telle que $K \subset U$. Montrer l'équation $f(z) = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans K.

Exercice 6

Soit $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Déterminer le rayon de convergence de la fonction de Bessel d'ordre r :

$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \cdot \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

†Exercice 7

Définissons les quatre ensembles suivants :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}, \quad \mathrm{Z} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |z| < 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\mathrm{E} = D(0,1) - \mathrm{Z} \subset D(0,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x < 0, \frac{\pi}{2} < y < 2\pi\} \subset \mathbb{H}.$$

1. Dessiner E et H, et donner deux fonctions analytiques $f\colon \mathrm{H} \to \mathrm{E}$ et $g\colon \mathrm{E} \to \mathrm{H}$ telles que $f \circ g = \mathrm{id}\colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ et $g \circ f = \mathrm{id}\colon \mathrm{H} \to \mathrm{H}$.
2. Donner deux fonctions analytiques $f\colon \mathbb{H} \to D(0,1)$ et $g\colon D(0,1) \to \mathbb{H}$ telles que $f \circ g = \mathrm{id}\colon D(0,1) \to D(0,1)$ et $g \circ f = \mathrm{id}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$.

†Exercice 8

Soit U un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur U telle que pour tout $z \in U$, un des coefficients du développement en série entière de f s'annule. Montrer que f est un polynôme.

†Exercice 9

Soit μ une mesure complexe finie sur un espace mesurable X, φ une fonction complexe mesurable sur X, et U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas $\varphi(X)$. Posons

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(\xi)}{\varphi(\xi) - z}, \quad z \in U.$$

Montrer que f est une fonction analytique sur U.

TD3 : La théorie de Cauchy

Olivier de Gaay Fortman

14 - 18 février 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f(z) = c_0 + c_k(z-z_0)^k$ avec $c_0 \neq 0$, $c_k \neq 0$ (k entier ≥ 1). Soit $\rho > 0$ et $\mathbb{S} = \partial D(z_0, \rho)$ le cercle de centre z_0 et rayon ρ. Montrer qu'il existe un élément $z \in \mathbb{S}$ tel que $|f(z)| > |c_0|$.
2. Démontrer la proposition plus générale suivante. Soit $f(z) = c_0 + (z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$ une série entière convergente dans un disque ouvert $D(z_0, r)$. Supposons que $|f(z)| \leq |f(z_0)| = |c_0|$ dans le disque $D(z_0, r)$. Alors $c_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
3. Soit U un ensemble ouvert connexe dans $\mathbb{C}$, et soit f une fonction complexe analytique dans U. Supposons que $z_0 \in U$ est tel que la fonction $z \mapsto |f(z)|$ atteint un maximum local en z_0 (c.a.d. il existe un $D(z_0, r) \subset U$ tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ dans $D(z_0, r)$). Montrer que f est constante.

Exercice 2

1. Soit $R \in \mathbb{R}_{>0}$ et soit f une fonction analytique dans $D(0, R)$. Pour tout r tel que $0 < r < R$, soit $M(r)$ la borne supérieure de $|f(z)|$ pour z dans $\partial D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Montrer que si f n'est pas constante, $M(r)$ est une fonction strictement croissante de r.
2. Supposons qu'il existe r avec $0 < r < R$ tel que la fonction $\theta \mapsto \left|f(re^{i\theta})\right|$ soit constante et tel que $f(z) \neq 0$ pour $|z| < r$. Montrer que f est constante.
3. En déduire que si pour une valeur de r ($0 < r < R$), la fonction $\theta \mapsto f(z)$ prend ses valeurs réelles sur $\partial D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, alors f est constante.

Exercice 3

Soit f une fonction définie et bornée dans le disque fermée $\overline{D}(0, 1)$, analytique dans le disque ouvert $D(0, 1)$, et continue dans $\overline{D}(0, 1)$.

1. Montrer que l'on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta = f(0)$.
2. En déduire que $|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(e^{i\theta})\right| d\theta$.
3. Montrer que si f est analytique dans un ouvert contenant le disque $\overline{D}(0, 1)$, l'égalité dans 2 ne peut avoir lieu que si f est constante dans le disque $\overline{D}(0, 1)$.

Exercice 4

Pour un chemin $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, soit $\gamma^0\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ le chemin opposé $\gamma^0(t) = \gamma(a + b - t)$. Pour deux chemins $\gamma_1\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2\colon [c, d] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, soit $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2$ la juxtaposition de γ_1 et γ_2 :

$$\gamma\colon [a, d + b - c] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si} \quad a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & \text{si} \quad b \leq t \leq d + b - c. \end{cases}$$

Si γ est un chemin dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$, montrer que le lacet $\gamma \wedge \gamma^0$ est homotope à un point dans U.

Exercice 5

1. Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ une série entière. Supposons que $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout n, et que $f(z)$ soit convergente sur $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ tout entier. Montrer que $f(z)$ est convergente sur $\mathbb{C}$ tout entier.
2. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{C} - \{i, -i\} \to \mathbb{C}$,
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons le développement de Taylor de $f(x)$ dans un intervalle ouvert atour de a. Montrer que cette série n'est pas convergente sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 6

Considérons les fonctions analytiques $f_i\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, 3)$ définies comme suit :
$$f_1(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$
Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer qu'il existe une fonction analytique $g_i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $g_i|_{\mathbb{C}^*} = f_i$.

Exercice 7

1. En appliquant la formule de Cauchy à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-1-iz}{z^3}$ sur le bord d'un demi-anneau $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq R, \Im(z) \geq 0\}$ contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^3} \mathrm{d}t$.
2. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le bord d'un secteur angulaire d'angle délimité par les segments $[0, R]$ et $\left[0, Re^{i\frac{\pi}{4}}\right]$ calculer la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.
3. Soit a un nombre réel. En appliquant la formule de Cauchy sur le rectangle de sommets $\pm R$ et$\pm R + i\frac{a}{2}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) \,\mathrm{d}x$.
4. En appliquant la formule de Cauchy à $z \mapsto \frac{\log z}{1-z}$ sur le bord de $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1 \text{ et } |z| \geq \epsilon\}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta) \,\mathrm{d}\theta$.

†Exercice 8

Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, on écrit (formellement) $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx$, et on appelle $\hat{f}$ la *transformée de Fourier* de f. Nous la désignons aussi par $\mathcal{F}(f)$.

1. Supposons que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit de support compact. Étendre $\hat{f}$ à une fonction définie sur $\mathbb{C}$. Montrer que, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on obtient $\hat{f}(z) = \hat{f}(x+iy) = \mathcal{F}(e^{-xy} f(x))(x)$.
2. Supposons que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soit de support compact. Montrer que $\hat{f}$ est entière, c.a.d. analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier.
3. Soit $A \in \mathbb{R}_{>0}$ et soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue à support dans $[-A, A]$. Supposons que $\int_{-A}^{A} |f(x)|^2 dx < \infty$. Montrer que $\hat{f}(z)$ est une fonction entière *du type exponentiel* A, c.a.d. il existe une constante C tel que $\left|\hat{f}(z)\right| \leq C \cdot e^{A|\Im(z)|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer aussi que $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dx < \infty$.
4. Supposons que $F(z)$ soit une fonction entière du type exponentiel A, et que $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty$. Montrer que $F = \hat{f}$ pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme dans 3.
5. Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-A, A]$. Montrer que $\hat{f}(z)$ est une fonction entière du type exponentiel A, et que $\hat{f}(x)$ est *rapidement décroissante* sur $\mathbb{R}$, c.a.d. pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_N tel que $\left|\hat{f}(x)\right| \leq C_N \cdot (1+|x|)^{-N}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
6. Soit $F(z)$ une fonction entière du type exponentiel A tel que $F(x)$ soit rapidement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F = \hat{f}$ pour une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme dans 5.

TD4 : Fonctions holomorphes

Olivier de Gaay Fortman

21 - 25 février 2022

Exercice 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$, $g\colon f(U) \to \mathbb{C}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ au sens réel.

1. Calculer $\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g \circ f)$.
2. En déduire que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}})}$ et que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{(\frac{\partial f}{\partial z})}$.

Exercice 2

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que f est constante si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

1. $f(z) = f(\bar{z})$, 2. $\Re(f)$ est constante, 3. $\Im(f)$ est constante, 4. $|f|$ est constante.

– –

Rappelons les définitions suivantes. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordinées linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Définissons Ω^* comme l'algèbre sur $\mathbb{R}$ engendré par $dx_1, \ldots, dx_n$ avec les rélations $(dx_i)^2 = 0$ et $dx_i dx_j = -dx_j dx_i, i \neq j$. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vide, et $\mathcal{C}^\infty(V)$ l'algèbre de $\mathcal{C}^\infty$ fonctions $f\colon V \to \mathbb{R}$. Les *formes différentielles* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* V sont les éléments de l'algèbre $\Omega^*(V) = \mathcal{C}^\infty(V) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*$. L'algèbre $\Omega^*(V)$ est naturellement gradué; un élément $\omega \in \Omega^q(V)$ s'appelle un *q-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur V*, et s'écrit uniquement comme $\sum f_{i_1,\ldots,i_q} dx_{i_1} \cdots d_{x_q}$ avec $i_1 < \ldots < i_q$. L'operateur $d\colon \Omega^q(V) \to \Omega^{q+1}(V)$ est défini par $df = \sum (\partial f/\partial x_i) dx_i$ pour $f \in \Omega^0(V)$, et par $d\omega = \sum df_I dx_I$ pour $\omega = \sum_I f_I dx_I$. Les formes dans le noyeau de $d\colon \Omega^q(V) \to \Omega^{q+1}(V)$ s'appellent *fermées*, et les formes dans l'image de $d\colon \Omega^{q-1}(V) \to \Omega^q(V)$ *exactes*.

– –

Exercice 3

1. En utilisant la formule $d(\tau \cdot \omega) = (d\tau) \cdot \omega + (-1)^q \tau \cdot d\omega$ pour $\tau \in \Omega^q(V)$, $\omega \in \Omega^r(V)$, montrer que les formes différentielles exactes sont fermées.
2. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, on définit $\mathrm{d}r = \mathrm{d}r\,(z) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta\,(z) = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$. On obtient ainsi deux formes différentielles sur $\mathbb{C}^*$. Ces formes sont-elles fermées ? Exactes ?
3. Montrer qu'en tout $z \in \mathbb{C}^*$ les applications $\mathrm{d}r\,(z)$ et $\mathrm{d}\theta\,(z)$ forment une $\mathbb{C}$-base de l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$ sa différentielle peut donc s'écrire $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$.
4. Exprimer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et de $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.
5. Que deviennent les équations de Cauchy–Riemann en coordonnées polaires ?
6. Montrer qu'une fonction holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}$ est constante si $\mathrm{Arg}(f)$ est constante.

Exercice 4

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité. On suppose qu'il existe $r \in\,]0,1[$ tel que f est bornée par M sur $\partial\mathbb{D}\,(0,r)$ et qu'il existe $a \in \mathbb{D}\,(0,r)$ tel que $f\,(a) = 0$. Montrer que $|a| \geq \frac{|f(0)|}{M+|f(0)|} r$.

Exercice 5

Soit f une fonction holomorphe sur $U \coloneqq \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \subset \mathbb{C}$.

1. En utilisant l'Exercice 3.5, montrer l'existence d'une primitive F de $z \mapsto 1/z$ sur U avec $F(1) = 0$.
2. Expliquer pourqoui, plus généralement, chaque fonction holomorphe $f \colon U \to \mathbb{C}$ admet une telle primitive.

Exercice 6

Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U.

1. Que peut-on dire de f si $\bar{f}$ est holomorphe ?
2. On suppose qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $z \in U$ on a $\Im(f(z)) = F(\Re(f(z)))$. Que peut-on dire de f ?
3. Conclure que l'image d'une fonction holomorphe $f \colon U \to \mathbb{C}$ non-constante ne peut pas être contenu dans l'image d'une $\mathcal{C}^1$ courbe $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$. Donner une autre preuve de ce fait.

Exercice 7

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient f et g des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $f(z) + \overline{g(z)}$ est réel pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = g + c$.
2. On suppose que g ne s'annule pas et que $f(z)\overline{g(z)}$ est réel pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f = cg$.

†Exercice 8

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U convergant simplement vers une fonction f sur U. Montrer qu'il existe un ouvert dense $V \subset U$ tel que f est holomorphe sur V.

†Exercice 9

1. Que peut-on dire des fonctions entières à valeurs dans un demi-plan ?
2. Soient f et g des fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \leq |g(z)|$. Que peut-on dire de f et g ?
3. Établir une version du théorème de Liouville pour les fonctions entières à croissance au plus polynômiale.
4. Montrer que les fonctions entières f telles que $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$ sont polynômiales.

†Exercice 10

Soit α une 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ fermée sur $D(0,1)$. Montrer qu'il existe une fonction $f \colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $\alpha = df$. Autrement dit (*Lemme de Poincaré*) : les 1-formes $\mathcal{C}^\infty$ fermées sur $D(0,1)$ sont *exactes*.

†Exercice 11

Soit $f \colon V \to W$ une application $\mathbb{R}$-différentiable entre deux ouverts V et W de $\mathbb{R}^2$. On dit que f *conserve les angles de manière infinitésimale* si, étant donné deux courbes régulières $\gamma_1 \colon [0,1] \to V$ et $\gamma_2 \colon [0,1] \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, les courbes images $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$ et $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$ forment entre elles au point $f(0)$ un angle orienté $(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0))$ égal à l'angle orienté $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$. On dit aussi que f est une *application conforme*. Montrer que si on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, alors f est une application conforme si et seulement si f est holomorphe et sa dérivée ne s'annule pas.

TD 5 : Fonctions holomorphes et harmoniques

Olivier de Gaay Fortman

7 - 11 mars 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in D(0,1)$. Définissons une fonction $g_\alpha\colon \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ par
$$g_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$
Expliquer pourquoi g_α est holomorphe sur $D(0,1)$.
2. Montrer que, pour $z \in \partial D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, on a $g_\alpha(z) \in \partial D(0,1)$.
3. En déduire que $g_\alpha(z) \in D(0,1)$ pour $z \in D(0,1)$.
4. Soit $z \in D(0,1)$ et $w = g_\alpha(z) \in D(0,1)$. Trouver $\beta \in D(0,1)$ tel que $z = g_\beta(w)$. Conclure que g_α et g_β sont des fonctions réciproquement inverses. En particulier, $g_\alpha\colon D(0,1) \to D(0,1)$ est un *automorphisme analytique du disque ouvert d'unité.*
5. Observer que $g_\alpha(\alpha) = 0$. Soit $f\colon D(0,1) \to D(0,1)$ un autre automorphisme analytique tel que $f(\alpha) = 0$. Montrer que f diffère de g_α par une rotation : il existe $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $f(z) = e^{i\varphi} \cdot g_\alpha(z)$.
6. Conclure que si f est un automorphisme de $D(0,1)$ tel que $f(0) = 0$, alors f est une rotation.

†Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème d'Ostrowski–Hadamard.

Théorème (Ostrowski–Hadamard)**.** *Soit $\lambda > 1$. Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $p_{n+1} > \lambda p_n$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{p_n}$ est de rayon de convergence 1. On note $f(z)$ pour $z \in D(0,1)$ sa somme. Alors il n'existe pas d'ouvert connexe U contenant le disque unité ouvert tel que $f\colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ s'étend à U en une fonction holomorphe.*

1. On suppose qu'il existe un tel U. Essayons d'arriver à une contradiction. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $1 \in U$.
2. On choisit un entier naturel non-nul k et on pose $\psi_k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{2}\left(z^k + z^{k+1}\right)$. Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors la fonction $f \circ \psi_k$ est bien définie et holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $1 + \epsilon$.
3. Choisir $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $\frac{k+1}{k} < \lambda$. En explicitant le développement en série entière en 0 de $f \circ \psi_k$, montrer que le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à $(1+\epsilon)^k$ et conclure.

[†]Exercice 3

En 1964, Erdös prouve que l'hypothèse du continu est équivalente à l'énoncé suivant.

Énoncé (E)**.** *Il existe un ensemble indénombrable $\mathcal{F}$ de fonctions entières tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'ensemble $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ est dénombrable.*

Le but de l'exercice est de démontrer ce résultat. On rappelle l'énoncé de l'hypothèse du continu.

Énoncé (Hypothèse du continu)**.** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *ou, de manière équivalente, il existe un bon ordre $<$ sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$ le segment initial $\{y \in \mathbb{R} : y < x\}$ est dénombrable.*

On rappelle à toutes fins utiles qu'un bon ordre est un ordre total pour lequel tout ensemble non-vide admet un plus petit élément.

1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions entières tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'ensemble $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ est fini, alors $\mathcal{F}$ est fini.
2. On suppose $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ et on se donne un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions entières de cardinal $\aleph_1$. Montrer que si f et g sont des éléments distincts de $\mathcal{F}$ alors l'ensemble $A_{f,g} = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ est au plus dénombrable. En déduire qu'il existe un point $z \in \mathbb{C}$ tel que l'application

$$\Phi_z : \mathcal{F} \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(z)$$

   est injective. Conclure que (E) implique l'hypothèse du continu.
3. On suppose l'hypothèse du continu et on se donne un bon ordre $<$ sur $\mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'ensemble $\{w \in \mathbb{C} : w < z\}$ est au plus dénombrable. On se donne un ensemble S dénombrable et dense dans $\mathbb{C}$. Construire par récurrence transfinie une famille $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$ de fonctions entières telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait
   (i) pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $w < z$ on a $f_w(z) \neq f_z(z)$;
   (ii) pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $w < z$ on a $f_z(w) \in S$.

   En déduire que l'hypothèse du continu implique (E).

Fonctions harmoniques

Exercice 4

1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer que $\log|f|$ est harmonique sur U.
2. Montrer que si $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ est harmonique, alors il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}^*$ et une constante $b \in \mathbb{R}$ telles que $u = \Re(f) + b \cdot \log|z|$.

†Exercice 5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe. Une 1-forme différentielle $\omega = pdx + qdy$ est *localement exacte* dans Ω si elle est exacte dans un voisinage de tout point $x \in \Omega$. Un fait, qu'on admettra, dit que ω est localement exacte si et seulement si $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout $\gamma = \partial R$ où R est un rectangle contenu dans Ω, et que si cette condition est satisfaite, alors $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ homologue à zéro dans Ω.

1. Pour une fonction harmonique $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, on a $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$; définissons ${}^*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$. Soient u_1 et u_2 deux fonctions harmoniques $\Omega \to \mathbb{R}$, et soit γ un lacet homologiquement trivial dans Ω. Montrer que $\int_\gamma u_1{}^*du_2 - u_2{}^*du_1 = 0$.
2. Soit $R \in \mathbb{R}_{>0}$ et $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\} \subset \mathbb{C}$. Soit $u\colon D(0,R) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, harmonique sur $U \subset D(0,R)$. Soit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ avec $r < R$. Montrer qu'ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(0,r)} u d\theta = \alpha \cdot \log r + \beta.$$
Montrer que $\alpha = 0$ et $\beta = u(0)$ si u est harmonique sur $D(0,R)$.

Exercice 6

Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert connexe et $u\colon U \to \mathbb{R}$ harmonique. Montrer que les zéros de u ne sont pas isolés.

†Exercice 7

1. Soit $\mathbb{S} = \partial D(0,1)$. Montrer qu'il existe une fonction $P\colon D(0,1) \times \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ telle que $u(x) = \int_{\mathbb{S}} u(z)P(x,z)dz$ pour tout $x \in D(0,1)$ et $u\colon U \to \mathbb{R}$ harmonique avec $\overline{D}(0,1) \subset U$.
2. Soit $u\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Montrer que u est *analytique*, c.a.d. pour tout $a = (a_1, a_2) \in U$, ils existent un voisinage ouvert $a \in \Omega \subset U$ et des nombres $c_{ij} \in \mathbb{R}$ tels que $u(x,y) = \sum_{i,j\geq 0} c_{ij}(x-a_1)^i(y-a_2)^j$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, où la série $\sum_{i,j\geq 0} c_{ij}(x-a_1)^i(y-a_2)^j$ est absolument convergente pour tout $(x,y) \in \Omega$.

TD 6: SUITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Olivier de Gaay Fortman

14 - 25 mars 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ tel que $f \circ f = \exp$. Supposons qu'il existe une telle fonction.

1. Montrer que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
2. Montrer qu'il existe un logarithme holomorphe g pour f sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer qu'il existe un nombre complexe c telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $g \circ f(z) = z + c$.
4. Conclure.

†Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie isolée de U. Soit f une fonction de A dans $\mathbb{C}$. Alors f s'étend en une fonction holomorphe de U dans $\mathbb{C}$.*

Posons $W_0(z) = 1 - z$ et, pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $W_n(z) = (1-z)\exp(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n})$. Ces fonctions s'appellent les *facteurs principaux de Weierstrass*.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $z \in \overline{D}(0,1)$. Montrer que $|1 - W_n(z)| \leq |z|^{n+1}$.

Soit $\{z_n\}$ une suite de nombres complexes, où $z_n \neq 0$ pour tout n et $|z_n|$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Posons $r_n = |z_n|$. Soit $\{p_n\}$ une suite d'entiers non négatifs telle que, pour tout nombre positif r, la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$ converge.

2. Montrer que le produit infini
$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} W_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$
définit une fonction entière $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui possède un zéro en chaque point z_n et ne possède aucun autre zéro dans $\mathbb{C}$.

En fait, la question 2 se généralise àux sous-ensembles ouverts de $\mathbb{C}$, de sorte qu'on puisse construire des fonctions holomorphes sur U aux zéros z_n prescrits (les zéros formant une suite $\{z_n\}$ de nombres $z_n \in U$ telle que $z_n \to \partial U$ quand $n \to \infty$). Admettons ce fait.

3. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe f sur U telle que pour tout ouvert V de $\mathbb{C}$ tel que U est strictement inclus dans V et V rencontre le bord de U, la fonction f ne s'étend pas à V. On dit que U est un *domaine d'holomorphie*.

Si K est une partie compacte de U on note

$$\widehat{K} = \left\{ z \in U : \forall f \in \mathcal{O}(U), |f(z)| \leq \sup_K |f| \right\}.$$

La partie $\widehat{K}$ s'appelle l'*enveloppe d'holomorphie* de K dans U. On dit que K est *holomorphiquement compact* dans U si $\widehat{K} = K$.

4. Donner un exemple de partie holomorphiquement compacte de $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas holomorphiquement compacte dans $\mathbb{C}$.
5. Montrer que si K est une partie compacte de U, alors $\widehat{K}$ est fermé dans U et que si $\widehat{K}$ est compact, alors il est holomorphiquement compact dans U.
6. Montrer que si $U = \mathbb{C}$, alors $\widehat{K}$ est compact pour toute partie compacte K de $\mathbb{C}$. On dit que $\mathbb{C}$ est *holomorphiquement convexe*.

On veut montrer que le résultat de la question précédente reste vrai sans l'hypothèse $U = \mathbb{C}$. On se donne une partie compacte K de U, et on pose $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$.

7. Soit f une fonction holomorphe sur U. Soit $r \in \left]0, \delta\right[$. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que pour tout $z \in K$ on tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$. En déduire que pour tout $z \in \widehat{K}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{M}{r^n}$.
8. En prenant pour f la fonction construite à la question 3, en déduire que $d\left(\widehat{K}, \mathbb{C} \setminus U\right) = \delta$, puis que $\widehat{K}$ est une partie compacte de U.
9. Montrer qu'il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties holomorphiquement compactes dans U telle que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$.
10. On écrit A comme l'image d'une suite injective sans point d'accumulation $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$ on pose $n(j) = \min\{m \in \mathbb{N} \cup \{-1\} : z_j \in K_{m+1}\}$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction holomorphe g sur U telle que $g(z_j) = \lambda$, $g(z_i) = 0$ pour $i = 0, \ldots, j-1$ et $\sup_{K_{n(j)}} |g| \leq \epsilon$ (avec la convention $K_{-1} = \emptyset$).
11. Démontrer le théorème en construisant une extension à f sous la forme d'une somme de fonctions holomorphes bien choisies.

Exercice 3

Soient α et β des éléments du disque unité ouvert. On note $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur le disque unité ouvert telles que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et vérifiant $f(\alpha) = \beta$.

1. Déterminer la valeur du supremum
$$\sup_{f \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta}} |f'(\alpha)|.$$
2. Déterminer si ce supremum est atteint et en donner les maximiseurs le cas échéant.

†Exercice 4

On note Φ l'ensemble des fonctions f holomorphes sur le disque unité ouvert et telle que pour tout z dans le disque on ait $0 < |f(z)| < 1$. Si $0 < c < 1$ on note Φ_c l'ensemble des éléments f de Φ tels que $f(0) = c$.

1. Déterminer la valeur du supremum (pour $0 < c < 1$)
$$\sup_{f \in \Phi_c} |f'(0)|$$
2. Déterminer la valeur du supremum
$$\sup_{f \in \Phi} |f'(0)|.$$
3. Déterminer si ces supremums sont atteints et, le cas échéant, déterminer les maximiseurs.

Indication : Pour $f \in \Phi$, construire un logarithme holomorphe pour f et remarquer que celui-ci envoie le disque unité dans le demi-plan de gauche. Composer alors ce logarithme par une homographie bien choisie qui envoie le demi-plan de gauche dans le disque unité, puis appliquer le lemme de Schwarz.

Exercice 5

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments non-nuls du disque unité ouvert telle que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1 - |\alpha_n|) < +\infty.$$

1. Montrer que le produit infini
$$\prod_{n\geq 0} \left(\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z}\right) \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$
converge uniformément sur tout compact du disque unité ouvert vers une fonction holomorphe B, bornée sur le disque unité ouvert, dont les zéros sont exactement les α_n (comptés avec multiplicté). Il s'agit d'un *produit de Blaschke.*
2. En déduire qu'il existe une fonction holomorphe bornée sur le disque unité ouvert qui n'admet d'extension à aucun ouvert V qui rencontre le bord du disque unité.

Exercice 6

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage U de 0 telle que $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$ et on suppose que $0 < |\lambda| < 1$.

1. Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors la suite de fonctions holomorphes formées par les $\psi_n : z \mapsto \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers une fonction holomorphe uniformément sur $\mathbb{D}(0, \epsilon)$.
2. En déduire qu'il existe des voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{C}$ et un biholomorphisme $\psi : V \to W$ tels que si $z \in V$ alors $f(z) \in V$ et $\psi \circ f(z) = \lambda \cdot \psi(z)$.
3. Comparer ce résultat avec l'exercice 10 du TD1.

†Exercice 7

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $M_0 = 1$ et

$$\sum_{n\geq 0} \frac{M_n}{M_{n+1}} < +\infty.$$

On va montrer le théorème suivant : *Il existe une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non-nulle, $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait*

$$\left|F^{(n)}(x)\right| \leq M_n.$$

1. On pose $\lambda_n = \frac{M_n}{M_{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le produit infini

$$\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 \prod_{n\geq 0} \frac{\sin \lambda_n z}{\lambda_n z}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction entière f.

2. Montrer que pour tout nombre réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|x^k f(x)\right| \leq M_k \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

3. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$|f(z)| \leq \frac{C_N}{1 + |z|^N} e^{A|\Im(z)|}.$$

4. En s'inspirant du théorème de Paley–Wiener (exercice 8 du TD3), conclure.

TD 7: Résidus

Olivier de Gaay Fortman

4 - 8 avril 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

— —

Rappelons les notions suivantes. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $x \in U$ et $f\colon U - \{x\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $r > 0$ tel que $D(x,r) \subset U$. On a vu dans le cours qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes vérifiant les propriétés suivantes :

- la série $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x)^n$ converge sur $D(x,r)$;
- la série $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-x)^n}$ converge et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}-\{x\}$;
- $f(z) = h(z) + g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-x)^n$, quel que soit $z \in D(x,r) - \{x\}$.

Définition. *La série $h(z)$ est* la partie singulière de f en x. *Le coefficient a_{-1} de $(z-x)^{-1}$ est* le résidue $\mathrm{Res}(f,x)$ de f en x. *La fonction f est* méromorphe en x *s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \leq k$. Si $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on dit que f a* un pôle (resp. zero) d'ordre m en x, *si $a_{-m} \neq 0$ (resp. $a_m \neq 0$) et $a_n = 0$ quel que soit $n < -m$ (resp. $n < m$).* La valuation $v_x(f)$ de f *en x est définie par*

$$v_x(f) = \inf\{n \in \mathbb{Z}\colon a_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \subset \{\pm\infty\}.$$

— —

Exercice 1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a_1, \ldots, a_n \in U$. Soit f une fonction holomorphe sur $U - \{a_1, \ldots, a_n\}$, et supposons que f soit méromorphe en chaque a_i (on dit par abus de langage que f définit une fonction méromorphe sur U). Montrer que $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur U, avec des pôles simples aux pôles et zéros de f, et on que l'on a

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = v_a(f), \qquad \text{quel que soit } a \in U.$$

Exercice 2

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et soient $a \in U$, $r > 0$ tels que $\overline{D}(a,r) \subset U$. Soit f holomorphe sur U. Supposons que $\partial D(a,r)$ ne contient aucun zéro de f. Montrer que le nombre de zéros de f dans $D(a,r)$, comptés avec multiplicité, est égal à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Exercice 3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Calculer

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+\lambda^2}e^{1/z}, 0\right)$$

Exercice 4

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert non-vide. Montrer que f est méromorphe sur U si et seulement si tout point $a \in U$ a un voisinage ouvert $a \in \Omega \subset U$ sur lequel f peut s'écrire sous la forme $f = g/h$, avec g et h holomorphes sur U.

Exercice 5

Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et $f\colon U \to \mathbb{C}$ méromorphe.

1. Montrer que les pôles de f sont isolés dans U.
2. Supposons que $\overline{D}(a,r) \subset U$ pour certains $a \in U$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\overline{D}(a,r)$.

Exercice 6

1. Soient $R > 0$ et $f\colon D(a,R) - \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que :
   (a) f est holomorphe en a si et seulement si f est bornée dans $D(a,r) - \{a\}$ quel que soit $r \in]0,R[$;
   (b) f est méromorphe mais non holomorphe en a si et seulement si $|f(z)| \to +\infty$ quand $z \to a$;
   (c) f a une singularité essentielle en a si et seulement si l'image de $D(a,r) - \{a\}$ est dense dans $\mathbb{C}$, quel que soit $r \in]0,R[$. *(En fait, l'image de $D(a,r) - \{a\}$ par f contient $\mathbb{C} - \{b\}$ pour un certain $b \in \mathbb{C}$ (le grand théorème de Picard)).*
2. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que si f n'est pas un polynôme, alors $f(\mathbb{C} - \overline{D}(0,n))$ est un ouvert dense de $\mathbb{C}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que f n'est pas injective.
3. Montrer que si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe et bijective, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert simplement connexe, f, g deux fonctions analytiques dans U, $\gamma\colon I = [0,1] \to U$ un lacet contenu dans U et tel que $\gamma(I)$ ne contienne aucun des zéros de f. Supposons en outre que l'on ait $|g(z)| < |f(z)|$ sur l'ensemble $\gamma(I)$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème (Théorème de Rouché)**.** *L'ensemble $\gamma(I) \subset U$ ne contient aucun des zéros de $f+g$ et si $a_1, \dots, a_r$ (resp. $b_1, \dots, b_s$) sont les zéros de f (resp. de $f+g$) d'incice $\neq 0$ par rapport à γ, on a*

$$\sum_{h=1}^{r} j(a_h;\gamma) \cdot v_{a_h}(f) = \sum_{k=1}^{s} j(b_k;\gamma) \cdot v_{b_k}(f+g). \tag{1}$$

1. Montrer que $\gamma(I) \subset U$ ne contient aucun des zéros de $f+g$.
2. Considérons la fonction $h = (f+g)/f$. Montrer que h est méromorphe dans U, et que l'on a
$$\frac{h'}{h} = \frac{(f+g)'}{f+g} - \frac{f'}{f}.$$
3. Soit $\Gamma = h \circ \gamma\colon I \to \mathbb{C}$ le lacet $t \mapsto h(\gamma(t))$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $|\Gamma(t) - 1| \leq r < 1$ quel que soit $t \in I$.
4. En déduire que $j(0, \Gamma) = 0$.
5. Conclure.

†Exercice 8

Soient $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Proposons-nous de localiser les racines de l'équation

$$\tan(z) = \alpha(z - \beta). \tag{2}$$

Montrer que l'équation (2) a exactement $2n+1$ racines $z \in \mathbb{C}$ telles que $|\Re(z)| < n\pi$ et $|\Im(z)| < n\pi$, dès que n est assez grand.

Indice : Observer que les zéros de (2) sont ceux de l'équation

$$\alpha(z-\beta)\cos(z) - \sin(z) = 0 \tag{3}$$

et appliquer le théorème de Rouché avec $U = \mathbb{C}$ et γ étant le périmètre du rectangle, juxtaposition des quatre chemins

$$\begin{aligned}
\gamma_1\colon &\quad t \mapsto n\pi + it, && -n\pi \leq t \leq n\pi,\\
\gamma_2\colon &\quad t \mapsto ni\pi - t, && -n\pi \leq t \leq n\pi,\\
\gamma_3\colon &\quad t \mapsto -n\pi - it, && -n\pi \leq t \leq n\pi,\\
\gamma_4\colon &\quad t \mapsto -ni\pi + t, && -n\pi \leq t \leq n\pi.
\end{aligned}$$

– –

---

†Exercice 9

On considère la série entière

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2^n} + \cdots$$

1. Montrer que le rayon de convergence R est $R = 1$.
2. Soit $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que les a_n sont ≥ 0 et que la série de terme général a_n soit divergente. Montrer que lorsque x est réel et tend vers 1 en restant < 1, $g(x)$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer que l'on a
$$f(z) = z^2 + f(z^2) = z^2 + z^4 + f(z^4) = \cdots$$
4. En déduire que tous les points du cercle $\partial D(0,1)$ sont singuliers pour f.

†Exercice 10

Démontrer le théorème de Liouville en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b \in \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = Re^{it}.$$

†Exercice 11

Prouver que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^3(x)}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}.$$

†Exercice 12

Montrer que l'on a

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(n\theta - \sin(\theta)) d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

TD 8: Fonctions méromorphes

Olivier de Gaay Fortman · 11 - 15 avril 2022

Exercice 1

Montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2, \quad \text{et puis que} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4/(1-2n)^2 = \pi^2.$$

Exercice 2

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. Pour f holomorphe sur $U - \{z_0\}$, montrer que :

1. Si f est holomorphe en z_0, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.
2. Si $f = g/h$, où g et h sont holomorphes sur U, si $g(z_0) \neq 0$, et si h a un zéro simple en z_0, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = g(z_0)/h'(z_0)$.
3. Si f a un pôle simple en z_0, et si g est holomorphe en z_0, alors $\mathrm{Res}(gf, z_0) = g(z_0)\mathrm{Res}(f, z_0)$.
4. Si $k \geq 1$, et $f = (z - z_0)^{-k} g$, où g est holomorphe sur U, alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = g^{(k-1)}(z_0)/(k-1)!$.

Exercice 3

1. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*, \xi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}, \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+8}\mathrm{d}x, \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$

1. Si $R \in \mathbb{C}(X, Y)$, calculer $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, \mathrm{d}t$ en supposant que R est tel que l'intégrale est bien définie. Traiter les cas particuliers $R = \frac{a}{a^2+Y^2}$ et $R = \frac{1}{(a+X)^2}$.
2. Pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n-2$, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^n}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(x+1)^2(x+2)}\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}\,(x)}\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

Montrer que toutes les solutions de l'équation $z \sin z = 1$ sont réelles. (*Appliquer le théorème de Rouché à* $\varphi\colon z \mapsto z\sin z$ *et* $\psi\colon z \mapsto z \sin z - 1$.)

Exercice 5

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f.

1. On suppose que pour tout entier n la fonction f_n est injective. Montrer que f est injective ou constante.
2. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout entier n, l'image de f_n est contenue dans V. Montrer que l'image de f est contenue dans V ou que f est constante.

†Exercice 6

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

1. Soit A une partie localement finie de U. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $b_0, \ldots, b_{m_\alpha}$. En utilisant le théorème de Mittag-Leffler ci-dessous, montrer qu'il existe une fonction holomorphe f sur U telle que pour tout $\alpha \in A$ et tout $k \in \{0, \ldots, m_\alpha\}$ on ait $f^{(k)}(\alpha) = b_k$.
2. Soient f et g des fonctions holomorphes sur U. On suppose que g n'est pas identiquement nulle et que f et g n'ont pas de zéro en commun. Montrer qu'il existe des fonctions holomorphes h_1 et h_2 sur U telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}(U)$ est un *anneau de Bézout* : si $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{O}(U)$ alors il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $h_1\mathcal{O}(U) + \cdots + h_n\mathcal{O}(U) = h\mathcal{O}(U)$.
4. Montrer que $\mathcal{O}(U)$ n'est pas principal. *(Construire une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}(U)$ telle qu'il n'existe pas de $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} h_i\mathcal{O}(U)\right) = h\mathcal{O}(U)$).*

Théorème (Mittag-Leffler)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $A \subset U$ une partie localement fini. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $a_1, \ldots, a_{m_\alpha}$. Il existe une fonction méromorphe f sur U telle que $f^{-1}(\{\infty\}) \subseteq A$ et pour tout $\alpha \in A$,*

$$f(z) \underset{z\to\alpha}{=} \sum_{n=1}^{m_\alpha} a_n (z-\alpha)^{-n} + O(1).$$

†Exercice 7

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{zt}}{t^t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. En appliquant la formule de Cauchy sur un quart d'anneau, montrer que si $z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors $|f(z)| \leq \frac{1}{\lambda}$.
3. En utilisant la fonction f construire une fonction entière g qui tend vers 0 le long de toute demi-droite partant de l'origine.

†Exercice 8

Existe-t-il une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(z) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$?

TD 9: Fonctions elliptiques

Olivier de Gaay Fortman · 18 - 22 avril 2022

Pour toute question ou remarque, veuillez envoyer un mail à olivier.de.gaay.fortman@ens.fr ou passer à mon bureau (T17, DMA, ENS).

Exercice 1

Soient Λ un réseau dans $\mathbb{C}$ et $\wp$ la fonction de Weierstrass associée.

1. Soit f une fonction elliptique paire de période Λ. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ et des nombres complexes $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ que l'on déterminera tels que
$$f = c\frac{\prod_{i=1}^{n}(\wp - a_i)}{\prod_{j=1}^{m}(\wp - b_j)}.$$
2. Soit f une fonction elliptique de période Λ. Montrer qu'il existe des fractions rationnelles P et Q telles que
$$f = P(\wp) + \wp' Q(\wp).$$

Exercice 2

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. La *fonction σ de Weierstrass* (relative à Λ) est défini par
$$\sigma(z) = \sigma(z; \Lambda) = z \prod_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{(z/\omega) + \frac{1}{2}(z/\omega)^2}.$$

Démontrer les propriétés de σ suivantes :

1. La fonction σ définit bien une fonction entière $\sigma \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
2. La fonction σ admet un zéro simple à chaque $\lambda \in \Lambda$, mais ne s'annule pas ailleurs.
3. On a
$$\frac{d^2}{dz^2} \log \sigma(z) = -\wp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$
4. Pour chaque $\omega \in \Lambda$, il existent $a, b \in \mathbb{C}$ (dépendant de ω) tels que
$$\sigma(z + \omega) = e^{az+b}\sigma(z), \quad \text{quel que soit } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau et $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction elliptique. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit

$$P_a = \{a + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1\}.$$

Choisissons $a \in \mathbb{C}$ tel que ∂P_a ne contient ni zéro ni pôle de f. Pour $[\omega] \in \mathbb{C}/\Lambda$, définissons $\mathrm{ord}_{[\omega]}(f) = \mathrm{ord}_\omega(f)$ pour $\omega \in P_a$ tel que $\omega \equiv [\omega] \mod \Lambda$.

1. Montrer que $\mathrm{ord}_{[\omega]}(f)$ ne dépend pas du choix de $a \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que il n'y a qu'un nombre fini de $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ tel que $\mathrm{ord}_z(f) \neq 0$.
3. Observer que $\mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}$ s'identifie avec le groupe des sommes formelles $\sum_{z\in\mathbb{C}/\Lambda} n_z \cdot (z)$ avec $n_z \neq 0$ que pour un nombre fini de $z \in \mathbb{C}/\Lambda$. Par la question précédente, la valeur
$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\omega\in\mathbb{C}/\Lambda} \mathrm{ord}_\omega(f) \cdot (\omega) \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}.$$
est bien défini.
4. Soit $\mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \subset \mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}$ le sous-groupe des sommes $\sum_{z\in\mathbb{C}/\Lambda} n_z \cdot (z)$ avec $\sum_z n_z = 0$. Montrer que la fonction
$$\mathrm{div}\colon \mathbb{C}(\Lambda)^* \to \mathbb{Z}^{(\mathbb{C}/\Lambda)}$$
est un homomorphisme de groupes, et que $\mathrm{div}(\mathbb{C}(\Lambda)^*) \subset \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda)$.

Exercice 4

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Soient $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ et $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{i=1}^r n_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r n_i z_i \in \Lambda.$$

Montrer qu'il existe une fonction elliptique $f(z) \in \mathbb{C}(\Lambda)$ telle que

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^r n_i \cdot (z_i).$$

(*Indice : Si* $\sum_{i=1}^r n_i \cdot z_i = 0$, *montrer que l'on puisse prendre* $f(z) = \prod \sigma(z - z_i)^{n_i}$.)

Exercice 5

Pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau, soit Σ le homomorphisme $\Sigma\colon \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \to \mathbb{C}/\Lambda$ défini par $\sum_z n_z \cdot (z) \mapsto \sum_z n_z \cdot z$. Prouver le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. Alors la suite suivante est exacte :*

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}(\Lambda)^* \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0(\mathbb{C}/\Lambda) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow 0$$

Exercice 6

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ un réseau. Supposons que $\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière telle que ils existent $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\theta(z+\omega_1) = a_1\theta(z) \quad \text{et} \quad \theta(z+\omega_2) = a_2\theta(z) \quad \text{quel que soit} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existent $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\theta(z) = be^{cz}$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau.

1. Montrer que pour tout $z, a \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, on a

$$\wp(z) - \wp(a) = -\frac{\sigma(z+a)\sigma(z-a)}{\sigma(z)^2\sigma(a)^2}.$$

   (*Indice : Comparer zéros et pôles.*)
2. Montrer que $\sigma(nz)/\sigma(z)^{n^2} \in \mathbb{C}(\Lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8

Pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$, définissons la *fonction zêta de Weierstrass* $\zeta_W(z)$ comme

$$\zeta_W(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega\in\Lambda \\ \omega\neq 0}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right).$$

1. Montrer que

$$\frac{d}{dz}\log\sigma(z) = \zeta_W(z), \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz}\zeta_W(z) = -\wp(z).$$

2. Montrer que

$$\zeta_W(-z) = -\zeta_W(z),$$

   et que pour tout $\omega \in \Lambda$, il existe $\eta(\omega) \in \mathbb{C}$, tel que

$$\zeta_W(z+\omega) = \zeta_W(\zeta) + \eta(\omega).$$

3. Si $\omega \notin 2\Lambda$, montrer que $\eta(\omega) = 2\zeta_W(\omega/2)$.
4. Montrer que l'application $\eta\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ est bien définie et bilinéaire.
5. Écrivons $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ avec $\Im(\omega_1/\omega_2) > 0$. Prouver la *relation de Legendre*

$$\omega_1\eta(\omega_2) - \omega_2\eta(\omega_1) = 2\pi i.$$

   (*Indice : Calculer l'intégrale de $\zeta_W(z)$ atour d'un parallélogramme fondamental P_a.*)

TD 10: Formes modulaires

Olivier de Gaay Fortman · 09 - 13 mai 2022

Les exercices marqués avec un † sont plus difficiles que les autres. Commencer à résoudre les exercices sans †, en utilisant chaque fois les exercices précédents (y compris les avec un †). Finir le reste des exercices seulement si le temps le permet.

1 L'espaces des réseaux

Rappel 1

— Un *réseau* dans $\mathbb{C}$ est un sous-groupe discret $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{R} \cdot \Lambda = \mathbb{C}$ (de façon equivalente : il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ et $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$).

— Deux réseaux Λ_i $(i = 1, 2)$ sont *homothétiques* si il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ avec $\lambda \cdot \Lambda_1 = \Lambda_2$.

— Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ par

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto \gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

— La fonction *zeta de Riemann* est la fonction $\zeta \colon \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\} \to \mathbb{C}$ définit par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

— La *série d'Eisenstein de poids* $2k$ $(k > 0)$ est la forme modulaire

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}} \frac{1}{(n\tau + m)^{2k}}.$$

Exercice 2

Soient $\omega_1, \omega_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}^*$ avec $\omega_1/\omega_2, \mu_1/\mu_2 \notin \mathbb{R}$. Définissons $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ et $\Lambda_2 = \mathbb{Z}\mu_1 + \mathbb{Z}\mu_2$. Montrer que :

1. On peut étendre l'action (1) à une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.
2. Soit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; définissons $j(\gamma, z) = cz + d$ $(z \in \mathbb{C} - \mathbb{R})$ si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors $\Im(\gamma z) = \frac{\det(\gamma)\Im(z)}{|j(\gamma,z)|^2}$ quel que soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.
3. Supposons que $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$. Pour que $\Lambda_1 = \Lambda_2$ et $\mu_1/\mu_2 \in \mathbb{H}$, il faut et il suffit qu'il existe $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des réseaux dans $\mathbb{C}$; observons que $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathcal{L}$. Il y a une bijection naturelle
$$\mathbb{C}^* \setminus \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}.$$

2 L'anneau des formes modulaires

Le but des exercices suivants (Exercices 3 - 10) sera de démontrer le

Théorème ($\star$)**.** *Le morphisme d'anneaux*

$$\mathbb{C}[x,y] \to \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{M}_k, \quad (x,y) \mapsto (E_4, E_6)$$

est un isomorphisme.

Exercice 3

Soit f une forme modulaire de poids k. Montrer que il existe une fonction holomorphe $\tilde{f} \colon D(0,1) \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = \tilde{f}(\exp(2\pi i z))$. En définissant $q = \exp(2\pi i z)$, on obtient

$$f(z) = \tilde{f}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Cette expansion s'appélle *l'expansion-q* de f.

†Exercice 4

Pour $t, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, soit $\sigma_t(n) = \sum_{d|n, d>0} d^t$. Soit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. En utilisant la formule

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} \exp(2\pi i d z), \quad \forall z \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

montrer que

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n.$$

Exercice 5

Définissons $E_{2k}(z) = \frac{(2k-1)!}{2(2\pi i)^{2k}} G_{2k}(z)$. Admettons la formule suivante :

$$\zeta(2k) = -\frac{(2\pi i)^{2k} B_{2k}}{2 \cdot (2k)!}, \quad k > 0. \tag{3}$$

Montrer que

$$E_{2k}(z) = -\frac{B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1} q^n.$$

Puis, définissons $\Delta \colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ comme

$$\Delta = \frac{(240E_4)^3 - (-504E_6)^2}{1728}.$$

Montrer que Δ est une forme modulaire de poids 12.

†Exercice 6

Utiliser (3) pour montrer que Δ est *parabolique*, c'est-à-dire $\Delta(\infty) = 0$.

†Exercice 7

Pour une forme modulaire f, on peut montrer que

$$\mathrm{ord}_z(f) = \mathrm{ord}_{\gamma z}(f), \qquad \text{quel que soit } \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Définissons $\mathrm{ord}_{z=\infty}(f) = \mathrm{ord}_{q=0}(\tilde{f})$. Prouver le résultat fondamental suivant :

Théorème (Formule de valence)**.** *Soit f une forme modulaire non-constante. Soit W l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$ privé des orbits de i et ρ, où $\rho = e^{2\pi i/3}$. Alors*

$$\mathrm{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2}\mathrm{ord}_i(f) + \frac{1}{3}\mathrm{ord}_\rho(f) + \sum_{w \in W} \mathrm{ord}_w(f) = \frac{k}{12}.$$

Exercice 8

Démontrer le suivant :

1. La série d'Eisenstein normalisée E_4 a un zéro simple à $z = \rho$ et aucun zéro ailleurs.
2. La série d'Eisenstein normalisée E_6 a un zéro simple à $z = i$ et aucun zéro ailleurs.
3. La forme modulaire Δ de poids 12 a un zéro simple à $z = \infty$ et aucun zéro ailleurs.

Exercice 9

Rappelons que M_k est l'espace vectorielle complexe de formes modulaires de poids k, et que $\mathrm{S}_k \subset \mathrm{M}_k$ est l'espace des formes modulaires cuspidales de poids k. Montrer que la multiplication par Δ définit un isomorphisme

$$\mathrm{M}_k \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_{k+12}.$$

Exercice 10

Démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Les espaces M_k et S_k sont de dimension finie pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En plus, $\mathrm{M}_k = \{0\}$ si $k < 0$ où si k est impair, et la dimension de M_k pour $k \geq 0$ pair est*

$$\dim \mathrm{M}_k = \begin{cases} \lfloor k/12 \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \mod 12, \\ \lfloor k/12 + 1 \rfloor & \text{si } k \not\equiv 2 \mod 12. \end{cases}$$

Exercice 11

Prouver le théorème $(\star)$.

3 Fonctions modulaires

†Exercice 12

1. Soit $z \in \mathbb{H}$. Prouver que
$$\sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{mz+n}-\frac{1}{mz+n+1}\right)=0,$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\neq 0}\left(\frac{1}{mz+n}-\frac{1}{mz+n+1}\right)=-\frac{2\pi i}{z}.$$
2. En utilisant l'identité $G_2(z) = 2\zeta(2) + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^2}$, en déduire que
$$z^{-2}E_2(-1/z) = E_2(z) - \frac{1}{4\pi i z}.$$

Exercice 13

Définissons la *fonction eta de Dedekind* comme suit :
$$\eta\colon \mathbb{H}\to\mathbb{C},\quad \eta(z) = q_{24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\quad q_{24} = \exp(2\pi i z/24).$$

1. Montrer que η est holomorphe et se n'annule nulle part.
2. Montrer que
$$\frac{d}{dz}\log(\eta(z)) = -2\pi i E_2(z).$$
3. En utilisant l'Exercice 11, montrer que
$$\frac{d}{dz}\log(\eta(-1/z)) = \frac{d}{dz}\log(\sqrt{-iz}\cdot\eta(z)).$$
4. Conclure que
$$\eta(-1/z) = \sqrt{-iz}\cdot\eta(z).$$
5. Montrer que η^{24} est une fonction modulaire de poids 12.
6. Montrer que $\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$.

Les coefficients de cette série sont dénotés par $\tau(n)$, d'òu
$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$
La fonction $n\mapsto\tau(n)$ s'appelle *la fonction τ de Ramanujan*. En 1916, Ramanujan a conjecturé quelques propriétés remarquables de τ, à savoir :

— τ est multiplicative, c.a.d. $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z} > 0\colon (n,m) = 1$;

— $\tau(p^r) = \tau(p)\tau(p^{r-1}) - p^{11}\tau(p^{r-2})$ pour tout nombre premier p et entier $r \geq 2$;

— $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ pour tout nombre premier p.

Les deux premières propriétés ont été prouvées par Mordell en 1917 et la dernière par Deligne en 1974 suite à sa preuve des conjectures de Weil.

Exercice 14

Supposons que f et g sont des formes modulaires du même poids k, avec expansions-q égales à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n$ respectivement. Supposons que

$$a_j = b_j, \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, \lfloor k/12 \rfloor.$$

Montrer que $f = g$. En particulier, si $a_j = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, \lfloor k/12 \rfloor$, alors $f = 0$.

Exercice 15

Définissons *la fonction* j comme

$$j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \quad j(z) = \frac{(240E_4)^3}{\Delta}.$$

Montrer que j est une *fonction modulaire* : une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$, méromorphe à l'infini, telle que $j(\gamma z) = j(z)$ quel que soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Quels sont les pôles de j ?

Montrer que les fonctions modulaires forment un corps F. Puis montrer que $F = \mathbb{C}(j)$, et que j est transcendant sur $\mathbb{C}$.

Remarques.

1. Par l'Exercice 15, la fonction j induit une fonction

$$j\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H} \to \mathbb{C}. \tag{4}$$

Il se trouve que (4) est une bijection. Par conséquant, l'espace $\mathbb{C}$ est une espace de paramètres (dit une *espace de modules*), paramétrant les classes d'homothétie de réseaux dans $\mathbb{C}$ (c.f. Exercice 2), ou encore les *courbes elliptiques* (c.f. TD 11). C'est de là que vient le mot "forme modulaire".

2. L'expansion-q de j est

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

Les coefficients de cette série sont fameux pour leur rôle dans la théorie du *clair de la lune monstrueux*, les reliant à la théorie de la représentation du *groupe monstre*.

TD 11 : Séries de Dirichlet, courbes elliptiques et formes modulaires

Olivier de Gaay Fortman · 16 - 20 mai 2022

1 Séries de Dirichlet

Exercice 1

Montrer les égalités suivantes, où chaque fois $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 1$:

1.
$$\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx;$$

2.
$$\sum_p \frac{1}{p^s} = s \int_1^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}} dx, \quad \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1;$$

3.
$$\frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}} dx, \quad M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n), \quad \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ (-1)^k & \text{si} \quad n = \prod_{i=1}^k p_i \mid p_i \neq p_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx, \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n);$$

5.
$$L(s, \chi) = s \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx, \quad A(x) = \sum_{n \leq x} \chi(n), \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log(p) & \text{si} \quad n = p^m \mid m \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

†Exercice 2

Supposons que la série $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ converge vers $A \in \mathbb{C}$, et soit $A(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$.

1. Montrer que les séries de Dirichlet $F(s) = \sum_{n=1}^\infty f(n) n^{-s}$ convergent, pour tout s avec $\sigma > 0$, et que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n^s} = A - s \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^{s+1}} dx, \quad R(x) = A - A(x).$$

2. En déduire que $F(\sigma) \to A$ quand $\sigma \to 0^+$.
3. Soit $\sigma > 0$ et $N \geq 1$ et un entier. Monter que

$$F(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^s} - \frac{A(N)}{N^s} + s\int_N^\infty \frac{A(y)}{y^{s+1}} dy.$$

4. Écrivons $s = \sigma + it$, prenons $N = 1 + [|t|]$ dans la partie 3. Montrer que

$$|F(\sigma + it)| = O(|t|^{1-\sigma}), \qquad 0 < \sigma < 1.$$

Exercice 3

On définit $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$. On rappelle que ξ est entière et vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$.

1. Montrer que pour tout s tel que $\Re s > 0$ et $s \neq 1$, on a

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$$

où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x.
2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $s \in \mathbb{C}$ on ait

$$|\xi(s)| \leq A \exp\left(B\,|s|^{1+\epsilon}\right).$$

Montrer que l'on ne peut pas prendre ici $\epsilon = 0$.
3. En déduire que la fonction ζ a une infinité de zéro dans la bande $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re s \leq 1\}$.

2 Formes modulaires

Exercice 4

Soit f une forme modulaire de poids $2k$, $k \geq 2$. Utilisons le théorème suivant :

Théorème (Hecke)**.** *Si f est parabolique, alors $a_n = O(n^k)$.*

Prouver que, si f n'est pas parabolique, l'ordre de grandeur de a_n est n^{2k-1}.

Exercice 5

Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ une forme modulaire de poids $2k$, $k > 0$. Définissons ses séries de Dirichlet associées :

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Montrer que $L(f,s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 2k$.

3 Courbes Elliptiques

Définition 6

Une *courbe elliptique* E est une équation de la forme

$$E\colon \{F = Y^2Z - X^3 + aXZ^2 + bZ^3 = 0\}, \qquad a, b \in \mathbb{C} \mid 4a^3 + 27b^2 \neq 0. \tag{2}$$

Le *discriminant* de E est la valeur $\Delta = 4a^3 + 27b^2 \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 7

On rappelle que le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est le quotient de $\mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ par l'action des homothéties $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^3$. Écrivons $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ pour la classe de $\mathbb{C}^*$-équivalence du point $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Montrer que, pour une courbe elliptique E, bien que l'application $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ ne descend pas en une application $F\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, le lieu de zéros suivant est bien défini :

$$E(\mathbb{C}) \coloneqq \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Montrer que le groupe $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On dit que deux courbes elliptiques E_i $(i = 1, 2)$ sont *isomorphes* s'il existe $\gamma \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ tel que $\gamma E_1(\mathbb{C}) = E_2(\mathbb{C})$.

Exercice 8

On se donne $\tau \in \mathbb{H}$. Définissons une équation E_τ comme

$$E_\tau\colon Y^2Z = 4X^3 - g_2(\tau)XZ^2 - g_3(\tau)Z^3.$$

1. Montrer qu'après un changement de variables, E_τ définit une courbe elliptique.
2. Montrer que E_τ s'identifie avec l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de l'équation
$$y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$$
auxquelles on a ajouté un point à l'infini que l'on identifiera.
3. Notons $\wp$ la fonction de Weierstrass associée au réseau Λ_τ. Montrer que, sous l'identification de la partie 2, l'application $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ induit une bijection
$$\mathbb{C}/\Lambda_\tau \xrightarrow{\sim} E_\tau$$
avec la convention que 0 est envoyé sur le point à l'infini.
4. Par la question précédente, E_τ hérite une structure de groupe abélien de celui de $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$. Montrer que pour $y \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_\tau$, la fonction suivante est identiquement nulle :
$$z \mapsto \begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix}.$$

Remarque. Rappelons que $\mathcal{L}$ était défini comme l'ensemble des réseaux Λ dans $\mathbb{C}$. Ci-dessus, on a défini une fonction $\mathbb{C}^* \setminus \mathcal{L} \to \{\text{courbes elliptiques}\} / \cong$. Il se trouve que cette fonction est *bijective*.

Exercice 9

Soit E une courbe elliptique, défini par un polynome $F \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{Q}$ telle que le changement de variables $X \mapsto X/c^2$, $Y \mapsto Y/c^3$ donne une courbe elliptique $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'on peut choisir $c \in \mathbb{Q}$ tel que $|\Delta|$ est minimal – on dit que l'équation est *minimale.*

Pour une telle équation minimale, et un nombre premier p, on obtient une équation $\bar{E} : Y^2Z = X^3 + \bar{a}XZ^2 + \bar{b}Z^3$; soit $\#\bar{E}(\mathbb{F}_p)$ le nombre de solutions de $\bar{E}$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 10

Continuous avec la notation de la question précédente. Soit p un nombre premier. Définissons $a_p = p + 1 - \#\bar{E}(\mathbb{F}_p)$. On admet le résultat suivant :

Théorème (Hasse)**.** *Les entiers a_p satisfont $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$.*

Définissons

$$\epsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \not| N, \\ 0 & \text{if } \ p \,|N; \end{cases} \qquad \text{et ensuite} \quad L(E, s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + \epsilon(p) p^{1-2s}}.$$

Montrer que $L(E, s)$ définit une fonction holomorphe sur $\{s \in \ \mathbb{C} \mid \Re(s) > 3/2\}$.

Remarque. Les séries de Dirichlet forment le lien entre les courbes elliptiques et les formes modulaires. Ce lien est montré par Wiles afin de prouver le dernier théoréme de Fermat. Pour être plus précis : plus généralement que ce que l'on a fait dans le cours, on peut définir, pour n'importe quel sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, une *forme modulaire de poids $2k$ pour* Γ comme une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ telle que

1. pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a $f(\gamma z) = (cz + d)^{2k} f(z)$;
2. la fonction $f \circ \gamma$ est holomorphe à l'infini, pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Pour un entier $N \geq 0$, le groupe

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N \right\}$$

est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et il se trouve que le résultat de l'Exercice 5 se généralise : les séries $L(f, s)$ de Dirichlet, associées à f comme dans l'Exercice 5, convergent pour $\Re(s) > k + 1$. On se demande si l'on obtient des séries de Dirichlet différentes en utilisant soit des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ (c.f. Exercice 10), soit des formes modulaires pour des groupes $\Gamma_0(N)$, $N \in \mathbb{N}$. La réponse à cette question est le fameux théorème de modularité :

Théorème (Modularité)**.** *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. Alors il existe $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et une forme modulaire f de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ telle que $L(f, s) = L(E, s)$.*

TD 12 : Analyse complexe

Olivier de Gaay Fortman · 23 - 27 mai 2022

Soit $T = \partial D(0,1)$. Rappelons que $L^p(T)$ est l'ensemble des fonction continues complexes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques, intégrables, et telles que la norme $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ est finie. Pour $f \in L^1(T)$, les *coefficients de Fourier* de f sont

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad (n \ \in \mathbb{Z}).$$

Les *séries de Fourier* de f sont les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$. Le *théorème de Parseval* dit que pour $f, g \in L^2(T)$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Exercice 1

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière avec rayon de convergence $R \geq 1$. Montrer que pour tout $r \in]0,1[$, on a $\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions sommes de séries entières convergentes sur le disque unité ouvert $D(0,1)$. On suppose que la fonction $|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2 : D(0,1) \to \mathbb{R}$ est constante. Que peut-on dire de $f_1, \dots, f_m$?

Exercice 3

Soit U un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur U telle que pour tout $z \in U$, un des coefficients du développement en série entière de f s'annule. Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4

Démontrer le théorème de Liouville en appliquant le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}, \quad a \neq b \in \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = Re^{it}.$$

Exercice 5

1. En appliquant la formule de Cauchy à la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-1-iz}{z^3}$ sur le bord d'un demi-anneau $\{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon \leq |z| \leq R, \Im(z) \geq 0\}$ contenu dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t - t}{t^3} \mathrm{d}t$.
2. En intégrant $z \mapsto e^{-z^2}$ sur le bord d'un secteur angulaire d'angle délimité par les segments $[0, R]$ et $\left[0, Re^{i\frac{\pi}{4}}\right]$ calculer la valeur des intégrales $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 6

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage U de 0 telle que $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$ et on suppose que $0 < |\lambda| < 1$.

1. Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors la suite de fonctions holomorphes formées par les $\psi_n : z \mapsto \frac{f^n(z)}{\lambda^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge vers une fonction holomorphe uniformément sur $\mathbb{D}(0, \epsilon)$.
2. En déduire qu'il existe des voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{C}$ et un biholomorphisme $\psi : V \to W$ tels que si $z \in V$ alors $f(z) \in V$ et $\psi \circ f(z) = \lambda \cdot \psi(z)$.

Exercice 7

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit A une partie localement finie de U. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $b_0, \ldots, b_{m_\alpha}$. En utilisant le théorème de Mittag-Leffler ci-dessous, montrer qu'il existe une fonction holomorphe f sur U telle que pour $\alpha \in A$ et $k \in \{0, \ldots, m_\alpha\}$ on ait $f^{(k)}(\alpha) = b_k$.
2. Soient f et g des fonctions holomorphes sur U. On suppose que g n'est pas identiquement nulle et que f et g n'ont pas de zéro en commun. Montrer qu'il existe des fonctions holomorphes h_1 et h_2 sur U telles que $f + h_1 g = e^{h_2}$.
3. En déduire que $\mathcal{O}(U)$ est un *anneau de Bézout* : si $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{O}(U)$ alors il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $h_1\mathcal{O}(U) + \cdots + h_n\mathcal{O}(U) = h\mathcal{O}(U)$.

Théorème (Mittag-Leffler)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $A \subset U$ une partie localement fini. Pour tout $\alpha \in A$, on se donne un entier m_α et des nombres complexes $a_1, \ldots, a_{m_\alpha}$. Il existe une fonction méromorphe f sur U telle que $f^{-1}(\{\infty\}) \subseteq A$ et pour tout $\alpha \in A$,*

$$f(z) \underset{z \to \alpha}{=} \sum_{n=1}^{m_\alpha} a_n (z - \alpha)^{-n} + O(1).$$

Exercice 8

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ un réseau. Supposons que $\theta \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction entière telle qu'ils existent $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$\theta(z + \omega_1) = a_1\theta(z) \quad \text{et} \quad \theta(z + \omega_2) = a_2\theta(z) \quad \text{quel que soit} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existent $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\theta(z) = be^{cz}$ quel que soit $z \in \mathbb{C}$.